

کاربرگ (1)

در سال‌های گذشته با مفهوم به توان رساندن اعداد و متغیرها آشنا شدیم. یاد گرفتیم که اگر متغیری مانند a داشته باشیم و تعداد n تایی آنها را در هم ضرب کنیم برابر a^n می‌شود.

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$$

توان ←
پایه ←

تمرین) حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $5^3 =$ ب) $(-2)^5 =$ پ) $-2^5 =$

ت) $0/3^2 =$ ث) $(-2)^6 =$ ج) $-2^6 =$

چ) $(\frac{2}{3})^5$ ح) $\frac{2^5}{3}$

دقت کنید که برای به توان رساندن عددهای منفی، اگر علامت منفی عدد را درون پرانتز قرار ندهیم به این معنی است که نباید علامت منفی (-) را به توان برسانیم. به عنوان نمونه در مثال برای محاسبه -2^6 ، 6 تا عدد 2 را در هم ضرب می‌کنیم و علامت منفی را پشت حاصل ضرب آن قرار می‌دهیم. اما برای به توان رساندن عدد مانند $(-2)^6$ ، 6 تا عدد 2- را در هم ضرب می‌کنیم و حاصل نهایی را به دست می‌آوریم که در نهایت علامت حاصل عبارت، مثبت می‌شود.

نکته 1) حاصل هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر 1 می‌شود.

نکته 2) حاصل هر عدد به توان 1 برابر خود آن عدد است.

نکته 3) عدد 1 به هر توان برسد، حاصل برابر 1 است.

نکته 4) فرض کنید $\frac{a}{b}$ عددی کسری است. اگر بخواهیم $\frac{a}{b}$ را به توان n برسانیم؛ خواهیم داشت:

n تا a در هم ضرب شده‌اند

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \dots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ تا } b \text{ در هم ضرب شده‌اند}} = \frac{a^n}{b^n}$$

n تا b در هم ضرب شده‌اند

نکته 5) در به توان رساندن عدد کسری مانند $\frac{a}{b}$ اگر $\frac{a}{b}$ را درون پرانتز قرار ندهیم، تنها صورت کسر به

توان می‌رسد.

$$\frac{a^n}{b} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ تا } a}}{b}$$

تمرینات

1- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

1) $-3^2 =$

2) $(-3)^2 =$

3) $-3^3 =$

4) $(-3)^3 =$

5) $\frac{-2^2}{3} =$

6) $\frac{-2}{3^2} =$

$$7) \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$8) \frac{4^2}{5} =$$

$$9) \left(-\frac{7}{6}\right)^2 =$$

نکته: در تمرین‌هایی که حاصل یک عبارت را می‌خواهند باید با توجه به تقدم عملیات، حاصل را به صورت یک عدد به دست آوریم.

تقدم عملیات			
1) پرانتز	2) توان و جذر	3) ضرب و تقسیم	4) جمع و تفریق

2- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$10) 5 \times 3^2 - 2^2 \times 3 =$$

$$11) \frac{3^4 - 2}{4^3 - 2} =$$

$$12) 3^5 - 4^3 =$$

$$13) (5^3 - 7^3)^0 - (2^4 + 2^3) =$$

$$14) \frac{4(1-9^2) + 2^2 \times 5}{5 \times (8^2 - 4)}$$

کاربرگ (2)

قانون به توان رساندن اعداد توان‌دار:

اگر a یک عدد دلخواه و m و n دو عدد صحیح باشند داریم:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

از این قانون می‌توان به صورت گسترده‌تر استفاده کرد.

$$(a^m \times b^p \times c^q)^n = a^{mn} \times b^{pn} \times c^{qn}$$

توان بیرونی در تکتک توان‌های اعداد داخل پرانتز ضرب می‌شود.

از این قانون زمانی بیشتر استفاده می‌شود که بخواهیم عدد توان‌دار را تجزیه کنیم.

به این صورت که ابتدا پایه را تجزیه کرده و توان عدد را در تکتک توان‌های تجزیه ضرب می-

کنیم.

تمرین: اعداد زیر را به‌طور کامل تجزیه کنید.

الف) $20^5 =$

ب) $(0/25)^{14} =$

پ) $36^{12} =$

ت) $32^4 =$

ث) $12^{30} =$

ج) $(3/2)^5 =$

قوانین ضرب اعداد توان‌دار:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

1- ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

2- ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های برابر

نکته 6) در جمع‌های تکراری، جمع به ضرب تقسیم می‌شود.

مثال: $\underbrace{m + m + m + m}_{m \text{ تا } 4} = 4m$ ، $\underbrace{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}_{4^5 \text{ تا } 4} = 4 \times 4^5 = 4^{1+5} = 4^6$

تمرین- حاصل عبارتهای زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

1) $(5^3)^2 \times 5^7 =$

2) $(-4)^5 \times (-4)^4 =$

3) $(\frac{3}{7})^4 \times (\frac{3}{7})^6 =$

4) $((-8)^3)^2 \times (12)^6 =$

5) $(-\frac{3}{7})^{10} \times \left(\left(\frac{14}{5}\right)^5\right)^2 =$

6) $(-\frac{8}{7})^{12} \times \left(\left(\frac{7}{8}\right)^3\right)^4 =$

7) $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 =$

8) $3^{20} + 3^{20} + 3^{20} =$

$$9) (5^{40} + 5^{40} + 5^{40}) \times (3^{40} + 3^{40} + 3^{40} + 3^{40} + 3^{40}) =$$

$$10) 2^5 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} =$$

$$11) \frac{20^{10} + 20^{10}}{8^3 + 8^3} =$$

$$12) 64^{18} + 64^{18} =$$

$$13) 3^{10} + 3^{10} + 3^{10} + 3^{11} + 3^{11} + 3^{12} + 3^{12} + 3^{13} + 3^{13} =$$

$$14) (4^7 + 4^7 + 4^7)(3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3) =$$

$$15) 16 \times 2^5 \times 81 \times 243 =$$

$$16) (0/5)^3 \times (\frac{1}{2})^4 \times (\frac{10}{20})^2 \times (\frac{50}{100})^8 =$$

$$17) (0/25)^{14} \times (\frac{1}{4})^{16} =$$

$$18) (2ax)^3 \times 8ax =$$

$$19) (x^2y^3)^4 \times (xy^2)^5 =$$

$$20) (5^2)^8 \times (3^4)^4 \times 2^{16} =$$

کاربرگ (3)

قوانین تقسیم اعداد توان‌دار

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

1- تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

2- تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های برابر

تمرین – حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$1) 0/3^7 \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$$

$$3) \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)^6 =$$

$$4) (2^4)^5 \div (2^2)^3 =$$

$$5) [(2^3)^4 \times (3^6)^2] \div 6^8 =$$

$$6) \frac{(2^5)^6 \times 2^4}{2^{24}} =$$

$$7) a^{10} \div (a^5 \div a^2) =$$

$$8) \frac{(3/2)^5 \div (0/8)^5}{12^3 \times (\frac{1}{3})^3}$$

$$9) \frac{(-36)^{12} \div (-9)^{12}}{2^6 \times 2^6} =$$

$$10) \frac{(7^3)^{11} \div (7^2)^4}{(7^5)^4 \div (7^4)^4} =$$

$$11) 7^{11} \text{ برابر عدد } 49 =$$

$$12) 2^{14} \times 3^{15} \text{ برابر عدد } 12 =$$

$$13) 8^{10} \text{ نصف عدد } =$$

$$14) 9^5 \text{ ثلث عدد } =$$

$$15) 27^3 \text{ برابر عدد } 81 =$$

$$16) (\frac{3}{2}m^2n^3)^3 =$$

$$17) (2mn^2)^2(3m^2n)^2 =$$

$$18) (4k^2)^3 \times (\frac{1}{2}k^5p)^2 =$$

$$19) (12x^2y)^3(18xy^2)^3 =$$

$$20) \left(\frac{m^2}{n}\right)^2 \left(\frac{n^2}{m}\right)^3 =$$

کاربرگ (4)

روش بدست آوردن جمله n ام الگوی عددی

اگر یک الگوی عددی داشته باشیم که هر عدد آن با یک مقدار ثابتی جمع شود و عدد بعدی بدست آید، میتوانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{(مقدار ثابت - جمله اول)} + \text{مقدار ثابت} \times n = \text{جمله } n \text{ ام}$$

مثال 1: در الگوهای عددی زیر جمله n ام را بدست آورید.

$$3, 6, 9, 12, \dots$$

عددها 3 تا 3 تا زیاد میشن و جمله اول (3) منهای مقدار ثابت (3) مساوی صفر میشه.

$$\text{پس جمله } n \text{ ام: } 3n$$

$$6, 10, 14, 18, \dots$$

عددها 4 تا 4 تا زیاد میشن و جمله اول (6) منهای مقدار ثابت (4) مساوی 2+ میشه.

$$\text{پس جمله } n \text{ ام: } 4n + 2$$

$$3, 8, 13, 18, \dots \quad \text{جمله } n \text{ ام:}$$

$$1, 8, 15, 22, \dots \quad \text{جمله } n \text{ ام:}$$

اگر یک الگوی عددی داشته باشیم که فاصله بین اعداد ثابت نباشد ، ابتدا اعداد را تجزیه میکنیم و با توجه به تجزیه الگوی آن را پیدا میکنیم.

مثال 2: الگوی اعداد ۰ و ۲ و ۶ و ۱۲ و ۲۰ و ... به صورت $n(n - 1)$ است. چون این اعداد را میتوانیم به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$0 = 1 \times 0$$

$$2 = 2 \times 1$$

$$6 = 3 \times 2$$

$$12 = 4 \times 3$$

$$20 = 5 \times 4$$

اگر همین اعداد بالای از ۲ شروع شده باشند یعنی به صورت ۲ و ۶ و ۱۲ و ۲۰ و ... باشند الگو به صورت $n(n + 1)$ میشود.

مثال 3:

$1/3, 2/5, 3/7, 4/9$

با دقت در کسرهای پیش رو می بینیم این کسرها گویی الگوی منظمی ندارند، اما صورت و مخرج آن ها به طور منظم با اعداد ثابتی جمع می شوند. پس الگوی جمله n ام صورت و مخرج را به طور جداگانه به دست می آوریم . پس اگر n را عدد صورت کسر در نظر بگیریم، ضریب آن یک خواهد بود که مساوی با n است. حال به سراغ مخرج می رویم و می بینیم ضریب n در مخرج، ۲ خواهد

بود. الگوی داده شده به ما کسری است و جمله عمومی این الگو هم به صورت کسری و به صورت روبرو است

$$\frac{n}{2n + 1}$$

تمرین- جمله n ام دنباله های زیر را بنویسید.

a) 11 , 21 , 31 , 41 , ...

b) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{4}{15}, -\frac{5}{20}, ..$

c) -3 , 2 , 7 , 12 ,

d) -18 , -6 , 6 , 12 ,

e) $\frac{4}{3}, \frac{7}{12}, \frac{10}{21}, \frac{13}{30},$

f) 8 , 16 , 32 , 64 , 128 ,

g) 8 , 27 , 64 , 125 ,

h) 3 , 8 , 13 , 18 ,

i) 20 , 24 , 28 , 32 ,

j) 13 , 17 , 21 , 25 ,